Structures Algébriques

1 Loi de composition interne

$$* \text{ est une loi de composition interne dans } E \iff \forall (a,b) \in E^2 \ ; \ a * b \in E$$

Avec E est un ensemble défini implicitement ou explicitement.

2 La Stabilité

$$S \text{ est une partie Stable dans } (E,*) \iff \forall (x,y) \in S^2 \ ; \ x * y \in S$$

Avec $*$ est une loi de composition interne dans E et $S \subseteq E$

3 La stabilité conserve

La stabilité conserve l'Associativité
La stabilité conserve la Commutativité
La stabilité conserve la Distributivité

4 La Stabilité – Avertissement :

$$\left.\begin{array}{r} * \text{ est LCI dans } E \\ S \subseteq E \end{array}\right| \nRightarrow S \text{ est stable dans } (E,*)$$

5 L'associativité :

$$* \text{ est une loi associative} \iff \left|\begin{array}{l} \forall (x,y,z) \in E^3 \\ (x*y)*z = x*(y*z) \end{array}\right.$$

Avec $*$ est une loi de composition interne dans E .

6 La commutativité :

$$* \text{ est une loi commutative} \iff \left|\begin{array}{l} \forall (x,y,) \in E^2 \\ x*y = y*x \end{array}\right.$$

7 L'élément neutre :

$$e \text{ est l'élément neutre dans } (E,*) \iff \left|\begin{array}{l} (\exists!\, e \in E), (\forall x \in E) \\ e*x = x*e = x \end{array}\right.$$

8 L'élément neutre - Avertissement

$$\left.\begin{array}{r} S \text{ est stable dans } (E,*) \\ e \text{ est l'élément neutre dans } (E,*) \end{array}\right| \nRightarrow \left| \begin{array}{l} e \text{ est l'élément neutre dans } (S,*) \end{array}\right.$$

9 La Symétrie :

$$\left.\begin{array}{r} a' = sym(a) \\ \text{dans } (E,*) \end{array}\right| \iff a * a' = a' * a = e$$

Avec $*$ est une LCI dans E.
e est l'élément neutre dans $(E,*)$.
L'élément a' est unique dans E.

10 Le symétrique d'un composé :

$$\left|\begin{array}{ll} \text{oubien} : & sym(a*b) = sym(b) * sym(a) \\ \text{oubien} : & (a*b)' = b' * a' \end{array}\right.$$

Avec $*$ est une loi de composition interne associative dans E.
e est l'élément neutre dans $(E,*)$.
a et b sont deux éléments de E.

11 L'élément régulier d'une LCI :

$$\left.\begin{array}{r} a \text{ est un élément régulier dans } (E,*) \end{array}\right| \iff \left|\begin{array}{lll} a*x = a*y & \Rightarrow & x=y \\ x*a = y*a & \Rightarrow & x=y \end{array}\right.$$

Quelques soient x et y dans E.
Pour toute LCI $*$ dans E.

12 L'Homomorphisme :

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ est un homomorphisme de } (E,*) \text{ vers } (F,\top) \end{array}\right| \iff \left|\begin{array}{l} \forall (x,y) \in E^2 : \\ f(x*y) = f(x) \top f(y) \end{array}\right.$$

13 L'Isomorphisme :

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ est un isomorphisme de } (E,*) \text{ vers } (F,\top) \end{array}\right| \iff \left|\begin{array}{l} f \text{ homomorphisme} \\ f \text{ est une bijection} \end{array}\right.$$

14 L'Homomorphisme conserve la stabilité :

$$\left.\begin{array}{c} f : (E,*) \mapsto (F,\top) \\ f \text{ est homomorphisme} \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f(E) \text{ est une partie} \\ \text{stable dans } (F,\top) \end{array}\right.$$

15 L'Homomorphisme conserve l'associativité :

$$\left.\begin{array}{c} f : (E,*) \mapsto (F,\top) \\ f \text{ est un homomorphisme} \\ * \text{ est associative dans } (E,*) \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} T \text{ est associative} \\ \text{dans } (f(E),\top) \end{array}\right.$$

16 L'Homomorphisme conserve la commutativité :

$$\left.\begin{array}{c} f : (E,*) \mapsto (F,\top) \\ f \text{ est un homomorphisme} \\ * \text{ est commutative dans } (E,*) \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} T \text{ commutative} \\ \text{dans } (f(E),\top) \end{array}\right.$$

17 L'Homomorphisme et l'élément neutre :

$$\left.\begin{array}{c} f : (E,*) \mapsto (F,\top) \\ f \text{ est un homomorphisme} \\ e \text{ est l'EN dans } (E,*) \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f(e) \text{ est l'EN} \\ \text{dans } (f(E),\top) \end{array}\right.$$

Avec : L'EN = l'élément neutre.

18 L'Homomorphisme et la symétrie :

$$\left.\begin{array}{c} f : (E,*) \mapsto (F,\top) \\ f \text{ est un homomorphisme} \\ x' = sym(x) \text{ dans } (E,*) \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f(x') = sym(f(x)) \\ \text{dans } (f(E),\top) \end{array}\right.$$

19 La structure de groupe :

$$\left.\begin{array}{c} (G,*) \text{ est} \\ \text{un groupe} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} * \text{ est associative dans } G \\ * \text{ admet un EN } e \text{ dans } G \\ (\forall a \in (G,*))(\exists!\ sym(a) = a' \in (G,*)) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{c} (G,*) \text{ est un} \\ \text{groupe abélien} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (G,*) \text{ est un groupe} \\ * \text{ est commutative dans } G \end{array}\right.$$

Groupe abélien = Groupe commutatif

$$\left.\begin{array}{c} (G,*) \text{ est un groupe} \\ a \in E \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a \text{ est un élément} \\ \text{régulier dans } (E,*) \end{array}\right.$$

20 Le sous-groupe d'un groupe :

$$\left.\begin{array}{c} (H,*) \text{ est un} \\ \text{sous-groupe} \\ \text{du groupe } (G,*) \end{array}\right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} H \subseteq G \ ; \ H \neq \emptyset \\ \forall (x,y) \in H^2 \ ; \ x * sym(y) \in H \end{array}\right.$$

21 L'Homomorphisme conserve la structure de groupe :

$$\left.\begin{array}{c} f : (G,*) \mapsto (F,\top) \\ f \text{ est un homomorphisme} \\ (G,*) \text{ est un groupe} \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f(G\,;*) = (f(G)\,;\top) \\ \text{est un groupe} \end{array}\right.$$

$*$ associative dans $G \Rightarrow \top$ associative dans $f(G)$

$e = EN(G,*) \Rightarrow f(e) = EN(f(G),\top)$

$x' = sym(x)$ dans $G \Rightarrow f(x') = sym(f(x))$ dans $f(G)$

22 La structure d'Anneau :

$$\left.\begin{array}{c} (A,*,\top) \text{ est} \\ \text{un Anneau} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (A,*) \text{ est un groupe abélien} \\ \top \text{ est associative dans } A \\ \top \text{ est distributive prp à } * \text{ dans } A \end{array}\right.$$

prp = par rapport

$$\left.\begin{array}{c} (A,*,\top) \text{ est} \\ \text{un Anneau} \\ \text{commutatif} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (A,*,\top) \text{ est un anneau} \\ \top \text{ est commuative dans } A \end{array}\right.$$

23 Diviseurs de Zéro dans un anneau

$$\left.\begin{array}{c} a \text{ est un diviseur} \\ \text{de Zéro dans } (A,*,\top) \end{array}\right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\exists\, b \in A), (b \neq e) \\ a \top b = b \top a = e \end{array}\right.$$

Avec $(A,*,\top)$ est un anneau.
e est l'élément neutre de la loi $*$.
et $a \neq e$.

24 Anneau intègre :

$$\left.\begin{array}{c} (A,*,\top) \text{ est un} \\ \text{Anneau intègre} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \forall (a,b) \in A^2 : \\ a \top b = e \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{oubien } a = e \\ \text{oubien } b = e \end{array}\right. \end{array}\right.$$

25 La structure de corps :

$$\left.\begin{array}{c} (K,*,\top) \text{ est} \\ \text{un corps} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (K,*,\top) \text{ est un anneau unitaire} \\ (\forall x \in K^*), (\exists!\, x' = sym_{\top}(x)) \end{array}\right.$$

Le mot unitaire veut dire que T admet un élément neutre (appelé souvent l'unité) dans K.
Avec e est l'élément neutre de $*$ dans K. et $K^* = k\backslash\{e\}$

26 Caractérisation des corps :

$$(K,*,\top) \text{ est un corps} \iff \begin{cases} (K,*) \text{ est un groupe abélien} \\ (K^*,\top) \text{ est un groupe} \\ \top \text{ est distributive prp à } * \text{ dans } K \end{cases}$$

Abélien signifie commutatif.
e est l'élément neutre de $*$ dans K.
$K^* = K\backslash\{e\}$.

27 Espace vectoriel réel :

$$(E,*,\cdot) \text{ est un espace vectoriel} \iff \begin{cases} (E,*) \text{ est un groupe abélien} \\ (\alpha * \beta)\cdot x = \alpha\cdot x * \beta\cdot x \\ (\alpha\beta)\cdot x = \alpha\cdot(\beta\cdot x) \\ \alpha\cdot(x*y) = \alpha\cdot x * \alpha\cdot y \\ 1\cdot x = x \end{cases}$$

Avec α et β sont deux éléments de $\mathbb{R}$.
et x et y sont deux éléments de E.

28 Famille génératrice :

$$\text{La famille } (x,y) \text{ est génératrice de } E \iff (\forall\, a \in E), (\exists\, \alpha,\beta \in \mathbb{R})\ \ a = \alpha\cdot x + \beta\cdot y$$

29 Dépendance & indépendance :

$$\text{La famille } (x,y) \text{ est liée} \iff \exists\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^{2*} :\ \alpha\cdot x + \beta\cdot y = 0$$

$$\text{La famille } (x,y) \text{ est libre} \iff \forall\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 :\ \alpha\cdot x + \beta\cdot y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Et } \alpha = 0 \\ \text{Et } \beta = 0 \end{cases}$$

30 Caractérisation des SEV :

$$F \text{ est un sev de } (E,+,\cdot) \iff (\forall\, \alpha \in \mathbb{R}), (\forall\, x,y \in F) :\ (\alpha x + y) \in F$$

sev = sous-espace vectoriel.
avec $(E,+,\cdot)$ est un R-espace vectoriel.
et $F \subseteq E$.

31 Base d'un espace vectoriel :

$$\text{La famille } (x,y) \text{ est une base de } E \iff (\forall\, m \in E), (\exists!\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}) :\ m = \alpha x + \beta y$$

Avec E est un espace vectoriel.

32 La dimension d'un esp vectoriel :

Le nombre d'éléments d'une base d'un esp vect E s'appele la dimension de E. notée $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$.

33 Espace vectoriel de dim fini E=R² :

$$\text{La famille } (\vec{x},\vec{y}) \text{ est libre} \iff (\vec{x},\vec{y}) \text{ est une base de } E$$

$$\text{La famille } (\vec{x},\vec{y}) \text{ est libre} \iff \det(\vec{x},\vec{y}) \neq 0$$

$$\text{La famille } (\vec{x},\vec{y}) \text{ est libre} \iff \begin{array}{cc} \vec{x} & \vec{y} \end{array} \quad \begin{vmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{vmatrix} \neq 0$$

34 Calcul du Déterminant d'une Matrice:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix} = ab - cd$$

$$\det(N) = \begin{vmatrix} a & i & g \\ e & b & j \\ k & f & c \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b & j \\ f & c \end{vmatrix} - e\begin{vmatrix} i & g \\ f & c \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} i & g \\ b & j \end{vmatrix}$$

$$= (abc + efg + ijk) - (gbk + ajf + iec)$$

$$= -i\begin{vmatrix} e & j \\ k & c \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & g \\ k & c \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & g \\ e & j \end{vmatrix}$$

$$= g\begin{vmatrix} e & d \\ k & f \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} a & i \\ k & f \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & i \\ e & b \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} b & j \\ f & c \end{vmatrix} - i\begin{vmatrix} e & j \\ k & c \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} e & d \\ k & f \end{vmatrix}$$

$$= -e\begin{vmatrix} i & g \\ f & c \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & g \\ k & c \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} a & i \\ k & f \end{vmatrix}$$

$$= k\begin{vmatrix} i & g \\ b & j \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & g \\ e & j \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & i \\ e & b \end{vmatrix}$$

$$\text{Règle des signes} :\ \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$